Weak Convergence for Nonexpansive Set-Valued Mappings(Optimization Theory in Descrete and Continuous Mathematical Sciences)

数理解析研究所講究録
1015 巻 1997 年 88-93

Weak Convergence for Nonexpansive Set-Valued Mappings

新潟大学大学院　自然科学研究科　木村　寛 (YUTAKA KIMURA)*
新潟大学大学院　自然科学研究科　沢崎　陽一 (YOICHI SAWASAKI)†
新潟大学　理学部　田中　謙輔 (KENSUKE TANAKA)‡

1. Introduction

X をヒルベルト空間, $C(\neq \emptyset)$ を X の閉凸部分集合とする. 写像 $T: C \to X$ が非拡大であるとは, すべての $x, y \in C$ に対して $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ が成り立つときである. 任意の $u \in C$, $t \in (0,1)$ に対して C から X への写像 T_t を次のように定義する.

$$T_t x := tTx + (1-t)u, \qquad \forall x \in C. \tag{1.1}$$

このとき T_t は縮小写像となるので, Banach contraction principle により C の中に T_t の不動点を一意に持つ. つまり,

$$\begin{aligned} x_t &= T_t x_t \\ &= tTx_t + (1-t)u \end{aligned} \tag{1.2}$$

を満たす. ここで, $\{x_t\}$ は $t \to 1$ としたとき, T の不動点に収束するか, という疑問が生じる. 実際これらに関しては, 多くの研究者により研究されてきており, 最近では, Xu and Yin [15] が (1.2) で定義された列が有界であれば $\{x_t\}$ は T の不動点に強収束するという結果を与えている. また, Kim and Takahashi [7] は Xu and Yin [15] の結果を更に拡張し, smooth な reflexive Banach 空間で双対写像の一価性を用いて同じ結果を与えている. そこで, 上の写像 T を非拡大集合値写像としても類似の結果が得られるのかという問が生じる. よって, 非拡大集合値写像 T に対して (1.1) と同じ形の写像を構成すると, T_t は集合値縮小写像となることにより 各 t に対して, C の中に不動点 x_t を持つ. つまり,

$$x_t \in C, \qquad \text{and} \qquad x_t \in T_t x_t. \tag{1.3}$$

を満たす. よってここでは, 非拡大集合値写像 T に対して, C が有界の場合と非有界の場合について (1.3) で定義した列 $\{x_t\}$ が T の不動点に弱収束する部分列を持つことを示す.

*Department of Mathematical Science, Graduate School of Science and Technology, Niigata University, Niigata 950–21, JAPAN
†Department of Mathematical Science, Graduate School of Science and Technology, Niigata University, Niigata 950–21, JAPAN
‡Department of Mathematics, Faculty of Science, Niigata University, Niigata 950–21, JAPAN

2. Preliminaries

X をバナッハ空間, C を X の閉凸部分集合とし, X^* を X の共役空間, T を C から X への集合値写像とする. このとき T が凸であるとは, 任意の $x_1, x_2 \in C$, $\alpha \in (0,1)$ に対して, $\alpha Tx_1 + (1-\alpha)Tx_2 \subset T(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2)$ が成り立つことである. T が閉値であるとは, 任意の $x \in C$ に対して Tx が閉集合であることをいう. また, T が $x_0 \in C$ で *upper hemicontinuous* であるとは, 任意の $p \in X^*$ に対して, 関数 $\sigma(T(\cdot), p) := \sup_{y \in T(\cdot)} \langle y\,,\, p \rangle : C \to \boldsymbol{R} \cup \{+\infty\}$ が x_0 で *upper semicontinuous* であることを言い, 特にすべての $x_0 \in C$ に対して上のことが成り立つとき, T は *upper hemicontinuous* であると言う. また今後簡単のため *upper hemicontinuous* であることを *u.h.c.* と略すことにする.

T は C から X への有界, 閉値な集合値写像であるとし, 次に, 非拡大集合値写像の定義を与える. T が C から X への非拡大集合値写像であるとは, 任意の $x, y \in C$ に対して,

$$H(Tx, Ty) \leq \|x - y\| \tag{2.1}$$

が成り立つときである. ただし, 記号 H はハウスドルフ距離を表し, 次のように定義されている.

$H(Tx, Ty) = \max\{\delta(Tx, Ty), \delta(Ty, Tx)\};$
$\delta(Tx, Ty) = \sup_{x_1 \in Tx} \rho(x_1, Ty);$
$\rho(x_1, Ty) = \inf_{y_1 \in Ty} \|x_1 - y_1\|,$

また T が集合値縮小写像であるとは, ある非負な数 t $(0 \leq t < 1)$ が存在して, 任意の $x, y \in C$ に対して,

$$H(Tx, Ty) \leq t\|x - y\| \tag{2.2}$$

が成り立つときをいう.

T の不動点全体の集合を記号 $F(T)$ で表すことにする. すなわち $F(T)$ は,

$$F(T) := \{x \in X | x \in Tx\} \tag{2.3}$$

なる集合である. このとき $F(T)$ に関して次の Proposition が成り立つ.

Proposition 1. X をバナッハ空間, C は X の閉凸部分集合とし, C から X への集合値写像 T は凸, u.h.c., かつ閉値であると仮定する. このとき $F(T)$ は閉凸集合となる.

Proof. $F(T)$ が凸集合であることは, 任意の $x_1, x_2 \in F(T)$ と$\alpha \in (0,1)$ に対して, T が凸集合値写像より,

$$\begin{aligned} \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 &\in \alpha Tx_1 + (1-\alpha)Tx_2 \\ &\subset T(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2). \end{aligned}$$

よって, $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in F(T)$ より $F(T)$ は凸集合である.

次に $F(T)$ が閉集合であることは, $x_0 \in X$ に収束するような $F(T)$ の任意の列 $\{x_n\}$ に対して, 各 n で $x_n \in F(T)$ より $x_n \in Tx_n$ を満たしている. よって, 任意の $p \in X^*$ に対して,

$$\langle x_n\,,\, p \rangle \leq \sup_{z \in Tx_n} \langle z\,,\, p \rangle =: \sigma(Tx_n, p).$$

ゆえに,

$$\begin{aligned}\langle x_0\,,\,p\rangle &= \lim_{n\to\infty}\langle x_n\,,\,p\rangle\\ &\le \limsup_{n\to\infty}\sigma(Tx_n,p)\\ &\le \sigma(Tx_0,p). \qquad (T \text{ は } u.h.c. \text{ より})\end{aligned} \tag{2.4}$$

したがって, すべての $p\in X^*$ に対して (2.4) より, $x_0\in\overline{co}(Tx_0)$ が成り立つ. 一方, 仮定より Tx_0 は閉凸集合なので $\overline{co}(Tx_0)=Tx_0$. よって, $x_0\in Tx_0$ より $x_0\in F(T)$ が得られ $F(T)$ は閉集合である. □

3. Main Results

任意の $u\in C$ を取り固定する. このとき任意の $t\in(0,1)$ に対して, C から X への集合値写像 T_t を次のように定義する.

$$\begin{aligned}T_tx &:= tTx+(1-t)u\\ (&= \{w\in X|w=tx_1+(1-t)u,\ x_1\in Tx\}\ )\end{aligned} \tag{3.1}$$

Lemma 1. T を C から C への集合値縮小写像であるとする. このとき, C のなかに T の不動点が存在する.

$$i.e., \qquad \exists x\in C, \qquad s.t. \qquad x\in Tx. \tag{3.2}$$

この **Lemma** の証明は参考論文 Nadler [9] を参照せよ.

次に T_t について興味深い次の定理が得られる.

Theorem 1. T を C から X への非拡大集合値写像であるとする. このとき, 任意の $t\in(0,1)$ に対して, C のなかに T_t の不動点が存在する.

$$i.e., \qquad \exists x\in C, \qquad s.t. \qquad x\in T_tx. \tag{3.3}$$

Proof. 任意の $t\in(0,1)$ を取る. このとき, 任意の $x,y\in C$ に対して,

$$\delta(T_tx,T_ty) = t\delta(Tx,Ty). \tag{3.4}$$

同様にして,

$$\delta(T_ty,T_tx)=t\delta(Ty,Tx). \tag{3.5}$$

したがって,

$$\begin{aligned}H(T_tx,T_ty) &= \max\{\delta(T_tx,T_ty),\delta(T_ty,T_tx)\}\\ &= \max\{t\delta(Tx,Ty),t\delta(Ty,Tx)\} \qquad ((3.4),\ (3.5) \text{ より})\\ &= t\max\{\delta(Tx,Ty),\delta(Ty,Tx)\}\\ &= tH(Tx,Ty)\\ &\le t\|x-y\|. \qquad (T \text{ は非拡大集合値写像より})\end{aligned} \tag{3.6}$$

ゆえに, T_t は集合値縮小写像であるので T_t は C のなかに不動点をもつ. よって, $x \in T_t x$ なる $x \in C$ が存在する. □

T が非拡大集合値写像のとき, 各 $t \in (0,1)$ に対して, T_t の $C \subset X$ のなかの任意の不動点を x_t とする. つまり, x_t は次の関係を満たしている.

$$x_t \in C, \qquad \text{かつ} \qquad x_t \in T_t x. \tag{3.7}$$

このようにして各 t に対応して作られた点 x_t の列 $\{x_t\}$ について,

$$C \cap F(T) \neq \emptyset, \tag{3.8}$$

を仮定して, 次の Theorem 2. と Theorem 3. を与える. ここで, 明らかに $C \cap F(T)$ は閉凸集合である.

Theorem 2. X をバナッハ空間, X の部分集合 C を有界閉凸集合とし, C から X への集合値写像 T は非拡大, u.h.c., かつ, 有界閉凸値であるとする. さらに, (3.8) を満たしているとする. このとき, (3.7) によってつくられた列 $\{x_t\}$ に対して, T の不動点に弱収束する $\{x_t\}$ の 部分列 $\{x_{t_n}\}$ が存在する.

Proof. $\{x_t\}$ が有界であることは, すべての $t \in (0,1)$ において $x_t \in C$ であり, 仮定より C が有界であるので明らか. よって, ある $z \in C$ に弱収束する T の不動点の列 $\{x_t\}$ の部分列 $\{x_{t_n}\}$ が存在する. そこで, 任意の $p \in X^*$ に対して,

$$\begin{aligned}
\langle x_{t_n}, p\rangle &\leq \sup_{z \in T_{t_n} x_{t_n}} \langle z, p\rangle \\
&= \sigma(T_{t_n}, p) \\
&= \sigma(t_n T x_{t_n} + (1-t_n)u, p) \\
&\leq t_n \sigma(T x_{t_n}, p) + (1-t_n)\langle u, p\rangle .
\end{aligned}$$

上式より, $t_n \to 1$ とすることで

$$\begin{aligned}
\langle z, p\rangle &= \lim_{t_n \to 1} \langle x_{t_n}, p\rangle \\
&\leq \limsup_{t_n \to 1} \sigma(T x_{t_n}, p) \\
&\leq \sigma(Tz, p). \qquad (T \text{ は } u.h.c. \text{ より})
\end{aligned} \tag{3.9}$$

したがって, すべての $p \in X^*$ に対して (3.9) が成り立つので, $z \in \overline{co}(Tz)$ となる. また, 仮定より Tz は閉凸集合なので, $\overline{co}(Tz) = Tz$. ゆえに,

$$z \in Tz$$

が成り立つ. □

次に, C が非有界閉凸集合で (3.7) によってつくられた列 $\{x_t\}$ が有界とならない場合について考察する.

Theorem 3. X をバナッハ空間, X の部分集合 C を閉凸集合とし, C から X への集合値写像 T は非拡大, u.h.c., かつ, 有界閉凸値であるとする. さらに, (3.8) と次の (3.10) が成立しているとする.

$$\exists v \in C \cap F(T), \qquad s.t. \qquad \liminf_{\substack{\|x_t\| \to \infty \\ x_t \in C}} \frac{\sup_{z \in Tx_t} \|z - v\|}{\|x_t - v\|} \leq 1. \tag{3.10}$$

このとき, ある有界な部分列 $\{x_{t_n}\} \subset \{x_t\}$ が存在し, この列 $\{x_{t_n}\}$ は集合値写像 T の不動点に弱収束する.

Proof. まずある $v \in C \cap F(T)$ に対して, $\|x_{t_n} - v\| \leq \|u - v\|$ なる $\{x_t\}$ の部分列 $\{x_{t_n}\}$ が存在することを示す. 任意の $t \in (0,1)$ に対して, $x_t \in T_t x_t$ より $x_t = tx_1 + (1-t)u$ を満たす $x_1 \in Tx_t$ が存在する. よって, 仮定 (3.10) の $v \in C \cap F(T)$ と, すべての $p \in X^*$ に対して,

$$\langle x_t - v \,, p \rangle = t \langle x_1 - v \,, p \rangle + (1-t) \langle u - v \,, p \rangle .$$

ゆえに,

$$\sup_{p \in X^*} \langle x_t - v \,, p \rangle \leq t \sup_{p \in X^*} \langle x_1 - v \,, p \rangle + (1-t) \sup_{p \in X^*} \langle u - v \,, p \rangle$$

より,

$$\|x_t - v\| \leq t\|x_1 - v\| + (1-t)\|u - v\|. \tag{3.11}$$

一方, 仮定 (3.10) より次の (3.12) を満たす 部分列 $\{t_n\} \subset \{t\}$ が存在する.

$$\frac{\sup_{z \in Tx_{t_n}} \|z - v\|}{\|x_{t_n} - v\|} \leq 1, \qquad \forall t_n. \tag{3.12}$$

ゆえに,

$$\sup_{z \in Tx_{t_n}} \|z - v\| \leq \|x_{t_n} - v\|. \tag{3.13}$$

既に, (3.11) はすべての t について成立していたので, (3.12) で選んだ $\{t_n\} \subset \{t\}$ についても明らかに成立するから, 各 t_n である $x_1 \in Tx_{t_n}$ が存在して,

$$\|x_{t_n} - v\| \leq t_n\|x_1 - v\| + (1-t_n)\|u - v\|$$

が成り立つ. ゆえに,

$$\begin{aligned} \|x_{t_n} - v\| &\leq t_n \sup_{z \in Tx_{t_n}} \|z - v\| + (1-t_n)\|u - v\| \\ &\leq t_n\|x_{t_n} - v\| + (1-t_n)\|u - v\|. \qquad ((3.13) \text{ より}) \end{aligned}$$

したがって, $(1-t_n)\|x_{t_n} - v\| \leq (1-t_n)\|u - v\|$ であるから

$$\|x_{t_n} - v\| \leq \|u - v\|.$$

ゆえに, $\{x_{t_n}\}$ は有界である.

次に定理の後半部分については Theorem 2. と同様にしてある $z \in C$ に弱収束する $\{x_{t_n}\}$ の部分列 $\{x_{t_{n_i}}\}$ が存在することを示せる. また仮定より Tz は閉凸集合であるので

$$z \in Tz$$

が成り立つ. □

References

[1] J.-P. Aubin and A. Cellina, Differential Inclusion, Springer-Verlag, Grundlehren der math, (1984).

[2] J.-P. Aubin and I. Ekeland, Applied Nonlinear Analysis, A Wiley-Interscience Publication, (1984).

[3] J.P. Aubin and H. Frankowska, Set-Valued Analysis, Birkhäuser Boston, (1990).

[4] J.P.Aubin, Optima and Equilibria (Springer-Verlag, New York, 1993).

[5] V. Barbu and Th. Precupanu, Convexity and Optimization in Banach Spaces, Editura Academiei, Bucharest, Romania, (1986).

[6] R.E.Bruck, A Simple Proof of The Mean Ergodic Theorem for Nonlinear Contractions in Banach Spaces, Israel J. Math. 32 (1979) 107-116.

[7] Gang-Eun Kim and W. Takahashi, Strong Convergence Theorems for Nonexpansive Nonself-mappings in Banach Spaces, Nihonkai Math. J. 7, No.1,(1996) 63-72.

[8] D.G.Luenberger, Optimization by Vector Space Methods (John Wiley & Sons, inc., 1969).

[9] Nadler. Sam B. Jr, Multi-Valued Cotraction Mappings, Pacific J. Math. 30 (1969) 475-488.

[10] R.T.Rockafellar, Extension of Fenchel's duality theorem for convex functions, Duke Math. J. 33 (1966) 81-89.

[11] N. Shioji and W. Takahashi, Convergence of Approximated Sequences for Nonexpansive Mappings, RIMS, 985 (1997) 94-105.

[12] T. Shimizu, A Strong Convergence Theorem for an Iteration of Nonexpansive Mappings, Nihonkai Math. J. 8, No.1,(1997) 85-90.

[13] T. Shimizu and W. Takahashi, Strong Convergence Theorem for Asymptotically Nonexpansive Mappings, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, 26, No.2, (1996) 265-272.

[14] R.Wittmann, Approximation of Fixed Points Nonexpansive Mappings, Arch. Math., 58 (1992) 486-491.

[15] Hong-Kun Xu and Xi-Ming Yin, Storong Convergence Theorems for Nonexpansive Nonself-Mappings, Nonlinear Analysis Theory, Methods and Applications, 24, No.2, (1995) 223-228.